STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-027 r

Una questione di approssimazione diodantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici

C.G. Lekkerkerker

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIII

1956

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

ESTRATTO

dal vol. XXI, 2° sem., fasc. 3-4 - (Settembre-ottobre) 1956

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1956

NORME PER LA PUBBLICAZIONE DEGLI ATTI ACCADEMICI

(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)

1. I *Rendiconti* della *Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali* si pubblicano, di norma, una volta al mese e contengono le *Note* ed i titoli delle *Memorie*, presentate da Soci ed estranei in occasione delle sedute precedenti. Sei fascicoli consecutivi, corrispondenti ad un semestre, compongono un volume.

2. Le *Note* di Soci ed estranei per i *Rendiconti* della Classe di Scienze fisiche, non possono oltrepassare le sei pagine di stampa, comprese le eventuali figure e tabelle.

Ove questo limite venisse superato, gli Autori saranno tenuti ad un contributo alle spese di pubblicazione fissato in L. 2.500 (duemilacinquecento) per ogni pagina in più; comunque, l'ampiezza delle singole *Note* non potrà oltrepassare le otto pagine.

In linea di massima, non è ammessa la suddivisione di uno stesso lavoro in più Note consecutive da pubblicarsi a brevi intervalli di tempo.

3. Le Note di estranei all'Accademia debbono essere presentate da Soci, che ne assumono naturalmente la responsabilità. Gli estranei possono pubblicare nei «Rendiconti» di Scienze fisiche sino a tre Note per ogni volume semestrale, ma non più di una per ogni fascicolo mensile.

4. È indispensabile che i manoscritti siano consegnati, od inviati esclusivamente alla «Cancelleria» dell'Accademia; che siano redatti nella forma definitiva, possibilmente dattilografati, oppure scritti in calligrafia ben chiara; essi dovranno sempre contenere l'indirizzo completo dell'Autore.

Nella revisione delle bozze sono da evitare le correzioni «straordinarie» (cioè, quelle che corrispondono a modificazioni del testo primitivo); le maggiori spese di stampa, eventualmente addebitate dalla Tipografia per questa ragione, saranno a carico degli Autori.

5. Gli Autori sono pregati di restituire le bozze corrette (ed il relativo manoscritto) entro sei giorni (indirizzando esclusivamente alla «Cancelleria» dell'Accademia).

Non si inviano seconde bozze, a meno che l'Autore ne faccia, caso per caso, esplicita richiesta. In questo caso, però, la pubblicazione del lavoro subirà gli inevitabili ritardi del caso.

6. Se il lavoro da pubblicare è illustrato o completato da figure o tavole fuori testo, è indispensabile che i relativi disegni o fotografie vengano consegnati insieme al manoscritto e redatti in forma tale da consentirne senz'altro la riproduzione.

Nei riguardi delle *Note* si raccomanda di evitare le figure a colori e quelle che richiedessero speciali qualità di carta per la tiratura. L'Accademia assume a suo carico le spese di riproduzione sino ad un massimo di L. 1.500 (mille e cinquecento) per ogni Nota.

7. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia, se i Soci che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta mensione, essi sono tenuti a consegnarne al Segretario, seduta stante, il testo.

8. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al punto 2 e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro iscritte nei volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce per iscritto in una prossima tornata della Classe, concludendo:

a) con una proposta di stampa in esteso o in sunto nelle Memorie accademiche;
b) colla proposta di far conoscere alcuni risultati o considerazioni contenute nel lavoro;
c) con un ringraziamento all'autore;
d) con la semplice proposta dell'invio del lavoro agli archivi dell'Accademia.

La Classe è tenuta a pronunciarsi sulle proposte della Commissione.

9. L'Accademia fornirà agli Autori, in prosieguo di tiratura, n. 50 estratti gratuti senza copertina, ai Soci, e n. 30 estratti gratuiti, senza copertina, agli estranei. Gli Autori potranno avere n. 50 estratti in più a pagamento, secondo la tariffa speciale riprodotta in calce (1). Per gli estratti con tiratura a parte che gli Autori desiderassero, oltre quelli concessi dall'Accademia, essi dovranno trattare direttamente con la tipografia Bardi (Roma - Salita dei Crescenzi, 16).

(1) Per n. 50 estratti, in più:

Pagg. 16 (senza copertina)	L.	610
» 8 » »	»	325
» 4 » »	»	190
Copertina (la stessa del fascicolo)	»	550
Copertina speciale (col titolo del lavoro) .	»	2.150

Roma, 1956 — Dott. G. BARDI, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale pei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. XXI, fasc. 3–4 – Ferie e 5 – Novembre 1956

Matematica. — *Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici.* Nota I [(*)] di CORNELIS GERRIT LEKKERKERKER, presentata dal Socio B. SEGRE.

1. Recentemente M. Cugiani [(1)] ha studiato la distribuzione, sopra l'asse reale, dei punti P di ascissa

$$r^2 - s^2 \alpha$$

dove α è un fissato numero reale positivo, mentre r ed s percorrono, indipendentemente l'uno dall'altro, l'insieme dei numeri interi. Indicando con $\mathrm{I}(\alpha)$ l'insieme di quei punti P e con

$$\sqrt{\alpha} = [a_0\,, a_1\,, a_2\,, \cdots, a_n\,, \cdots] \tag{1}$$

lo sviluppo di $\sqrt{\alpha}$ in frazione continua regolare, i risultati principali di tale Autore possono venire enunciati come segue:

L'origine è un punto di accumulazione da destra di $\mathrm{I}(\alpha)$ *se, e soltanto se, la successione* $a_0\,, a_2\,, a_4\,, \cdots$ *non è superiormente limitata; se questa condizione è soddisfatta, l'insieme* $\mathrm{I}(\alpha)$ *è denso su tutto il semiasse a destra dell'origine. Analogamente, l'origine è un punto di accumulazione da sinistra di* $\mathrm{I}(\alpha)$ *se, e soltanto se, la successione* $a_1\,, a_3\,, a_5\,, \cdots$ *non è superiormente limitata, e l'insieme* $\mathrm{I}(\alpha)$ *è denso su tutto il semiasse a sinistra dell'origine se vale quest'ultima condizione.*

È però più difficile dare informazioni sulla densità di $\mathrm{I}(\alpha)$ sui rispettivi semiassi, se le sottosuccessioni dei quozienti parziali relativi alla (1) sono superiormente limitate. Il Cugiani dimostra soltanto in proposito che *ognuno degli intervalli* $(0\,, 2\sqrt{\alpha} + 1)$ *e* $(-2\sqrt{\alpha} - 1\,, 0)$ *contiene allora sempre almeno un punto di accumulazione di* $\mathrm{I}(\alpha)$. Nel presente lavoro ci proponiamo di continuare lo studio dell'insieme $\mathrm{I}(\alpha)$ nel caso che la successione $a_0\,, a_1\,, a_2\,, \cdots$ sia superiormente limitata.

Porremo $\sqrt{\alpha} = \theta$. Prima di enunciare i teoremi a cui giungeremo in questa Nota I ed in una successiva Nota II, vogliamo introdurre un certo insieme, $\mathrm{J}(\theta)$, legato strettamente all'insieme $\mathrm{I}(\alpha)$. Consideriamo un punto, di ascissa x, che sia di accumulazione per $\mathrm{I}(\alpha)$. Allora esiste una successione $(r_1\,, s_1)\,, (r_2\,, s_2)\,, (r_3\,, s_3)\,, \cdots$ di coppie di interi non nulli tale che

$$\lim_{n\to\infty} (r_n^2 - s_n^2 \alpha) = x\,; \tag{2}$$

possiamo supporre, senza limitazione sostanziale, $r_n > 0, s_n > 0$ $(n = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots)$. Evidentemente si ha $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, ed inoltre:

$$r_n^2 - s_n^2 \alpha = r_n^2 - s_n^2 \theta^2 = s_n^2\left(\frac{r_n}{s_n} - \theta\right)\left(\frac{r_n}{s_n} + \theta\right) > r_n\, s_n\left(\frac{r_n}{s_n} - \theta\right).$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1956.

(1) Si veda: M. CUGIANI, *Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare*, « Bollettino della U.M.I. » (3), *10*, 489–497 (1955).

Quindi abbiamo, in virtù della (2),

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_n}{s_n}-\theta\right)=0,$$

sicché anche, per la (2),

$$\lim_{n\to\infty} s_n^2\left(\frac{r_n}{s_n}-\theta\right)=\frac{x}{2\theta}\,. \tag{3}$$

Inversamente, dalla (3) segue la (2). Indicheremo d'ora in poi con $J(\theta)$ l'insieme dei punti di ascissa

$$s^2\left(\frac{r}{s}-\theta\right),$$

dove r e s percorrono, indipendentemente l'uno dall'altro, l'insieme dei numeri interi positivi. Indicheremo poi con $I'(\alpha)$ l'insieme derivato di $I(\alpha)$ (cioè l'insieme dei punti di accumulazione di $I(\alpha)$), ed analogo significato avrà $J'(\theta)$. Allora la proprietà dimostrata sopra viene espressa così (con notazione ovvia):

$$J'(\theta)=\frac{1}{2\theta}I'(\alpha) \qquad (\theta=\sqrt{\alpha}). \tag{4}$$

Supporremo sempre che θ sia *un numero (irrazionale) positivo tale che l'insieme dei quozienti parziali nello sviluppo* (1) *sia superiormente limitata.*

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA A. – *Condizione necessaria e sufficiente perché l'insieme* $J'(\theta)$ *sia discreto è che* θ *sia un numero quadratico.*

Com'è noto, un numero irrazionale θ risulta quadratico se, e soltanto se, lo sviluppo di θ in frazione continua regolare è periodico da un certo indice in poi. Il teorema A ci fornisce una proprietà caratteristica assai diversa dei numeri quadratici; essa può esprimersi anche così: in ogni intervallo finito, cade soltanto un numero finito di punti di accumulazione di $J(\theta)$.

In virtù della (4), il teorema A può anche essere formulato mediante il

TEOREMA B. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme* $I'(\alpha)$ *sia discreto è che* α *sia il quadrato di un numero quadratico.*

Esistono numeri θ del tipo considerato per i quali l'insieme $J'(\theta)$ è abbastanza ricco. Naturalmente, in forza dei risultati menzionati sopra, l'origine è sempre un punto isolato dell'insieme $J(\theta)$. Vale, però, il

TEOREMA C. – *Sia* k *un numero intero* $\geqq 6$. *Allora esistono numeri* θ *aventi le due seguenti proprietà*:

1ª *l'insieme* $J(\theta)$ *è denso sull'asse reale al di fuori dell'intervallo* $(-1/k\,,\,1/k)$;

2ª *il numero* θ *ammette uno sviluppo in frazione continua regolare*

$$\theta=[a_0\,,a_1\,,a_2\,,\cdots,a_n\,,\cdots],$$

dove $a_n\leqq k-1$ *per* $n=1\,,2\,,\cdots$

In modo ovvio, questo teorema potrebbe anche essere formulato con riferimento ai numeri α ed agli insiemi I (α).

2. Useremo in seguito le seguenti notazioni:

k denota un numero intero positivo;

a e b designano numeri interi con $a \geqq 1$, $b \geqq 0$;

L (k) è l'insieme dei numeri $\theta > 0$ aventi uno sviluppo in frazione continua regolare

$$\theta = [a_0 , a_1 , a_2 , \cdots , a_n , \cdots] , \tag{5}$$

dove $a_n \leqq k$ per $n = 1 , 2 , 3 , \cdots$;

$p_0/q_0 , p_1/q_1 , p_2/q_2 , \cdots$ indicano le ridotte dello sviluppo (5);

$a_0^* , a_1^* , a_2^* , \cdots$ denotano i quozienti completi dello sviluppo (5), definiti così:

$$a_n^* = [a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , \cdots] \qquad (n = 0 , 1 , 2 , \cdots) .$$

Dimostreremo successivamente la sufficienza e la necessarietà della condizione che appare nell'enunciato del teorema A. A tale scopo premetteremo vari lemmi, anzitutto il seguente che in un certo senso è una generalizzazione di un noto teorema sulle ridotte p_n/q_n (2):

LEMMA 1. – *Siano γ un numero positivo e θ un numero di* L (k), *e siano r ed s interi positivi. Supponiamo che*

$$\left| \frac{r}{s} - \theta \right| < \frac{1}{k+2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{r}{s} - \theta \right| < \frac{\gamma}{s^2} . \tag{6}$$

Allora esistono un intero positivo n e due numeri interi a e *b, tali che:*

$$r = ap_{n-1} + bp_{n-2} \quad , \quad s = aq_{n-1} + bq_{n-2} , \tag{7}$$

$$a \geqq 1 , 0 \leqq b \leqq a \leqq c(k , \gamma) = 2 \sqrt{(\gamma (k + 2)^3} . \tag{8}$$

(*Nel caso che sia $n = 1$, si assuma $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$*).

Dimostreremo poi il teorema C; la dimostrazione sarà basata essenzialmente su un risultato di M. Hall (3), che vogliamo così enunciare:

LEMMA 2. – *Ogni numero nell'intervallo* $(\sqrt{2} - 1 , 4\sqrt{2} - 4)$ *può scriversi come la somma di due numeri di* L (4) *compresi fra* 0 *e* 1.

3. DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1. – Consideriamo dapprima i quozienti parziali a_n^*. Siccome $a_n \leqq k$ per $n \geqq 1$, valgono le seguenti disuguaglianze

$$\left. \begin{aligned} a_n^* &> a_n + \frac{1}{k+1} \\ a_n^* &< a_n + \frac{1}{1 + 1/(k+1)} = a_n + 1 - \frac{1}{k+2} \end{aligned} \right\} \quad (n = 0 , 1 , 2 , \cdots) .$$

(2) Si veda ad esempio: HARDY & WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford (1945), teorema 184, p. 152.

(3) M. HALL, *On the sum and product of continued fractions*, «Annals of Math.», *48*, 966-993 (1947).

Ne segue per $n \geqq 1$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n^*} > \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + 1/(k+1)} > \frac{1}{(k+1)\, a_n\, (a_n+1)} > \frac{1}{(k+2)^3}\,;$$

$$\frac{1}{a_n^*} - \frac{1}{a_n+1} > \frac{1}{a_n + 1 - 1/(k+2)} - \frac{1}{a_n+1} > \frac{1}{(k+2)\,(a_n+1)^2} > \frac{1}{(k+2)^3}\,.$$

Abbiamo dunque

$$\frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{(k+2)^3} < \frac{1}{a_n^*} < \frac{1}{a_n} - \frac{1}{(k+2)^3} \qquad (n = 1\,, 2\,, \cdots). \tag{9}$$

Per $n = 0$ si ha $a_0 + 1/(k+1) < \theta = a_0^* < a_0 + 1 - 1/(k+2)$; se ne deduce, in virtù della prima relazione (6):

$$a_0 < \frac{r}{s} < a_0 + 1\,. \tag{10}$$

Ciò ci dice che, negli sviluppi dei numeri θ e r/s in frazioni continue regolari, gli zeroesimi quozienti parziali coincidono. Denotiamo con n l'indice massimo tale che in questi due sviluppi i corrispondenti quozienti parziali coincidano fino all'indice $n - 1$, tale che cioè $p_0/q_0\,, p_1/q_1\,, \cdots, p_{n-1}/q_{n-1}$ siano ridotte anche per il numero r/s, mentre p_n/q_n non lo sia. Allora, dalla teoria delle frazioni continue, segue che si può scrivere

$$r = ap_{n-1} + bp_{n-2} \quad , \quad s = aq_{n-1} + bq_{n-2}\,,$$

dove a e b sono certi numeri interi con $a \geqq 1$, $b \geqq 0$. Valgono inoltre le relazioni

$$\theta = \frac{a_n^* p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}} \quad , \quad \frac{r}{s} = \frac{a_n^{**} p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^{**} q_{n-1} + q_{n-2}}\,,$$

dove a_n^* e a_n^{**} sono quozienti completi degli sviluppi di θ e r/s in frazioni continue. Sottraendo queste due equazioni a membro a membro, troviamo

$$\theta - \frac{r}{s} = \frac{(a_n^* - a_n^{**})\,(p_{n-1}\,q_{n-2} - p_{n-2}\,q_{n-1})}{(a_n^*\,q_{n-1} + q_{n-2})\,(a_n^{**}\,q_{n-1} + q_{n-2})} =$$

$$= \frac{(-1)^n\,(a_n^* - a_n^{**})}{(a_n^*\,q_{n-1} + q_{n-2})\,(a_n^{**}\,q_{n-1} + q_{n-2})}\,,$$

e quindi

$$\frac{1}{a_n^{**}} - \frac{1}{a_n^*} = (-1)^n \left(\theta - \frac{r}{s}\right) \left(q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^*}\right) \left(q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^{**}}\right).$$

Infine sappiamo che p_n/q_n non è una ridotta per il numero r/s. Ne segue che a_n^{**} non è contenuto nell'intervallo $(a_n\,, a_n + 1)$. Quindi abbiamo, per la (9),

$$\left| \frac{1}{a_n^{**}} - \frac{1}{a_n^*} \right| > \frac{1}{(k+2)^3}\,,$$

eppertanto, facendo uso della seconda relazione (6),

$$\frac{1}{(k+2)^3} < \left|\theta - \frac{r}{s}\right| \cdot \left(q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^*}\right)\left(q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a^{**}_n}\right)$$

$$< \left|\theta - \frac{r}{s}\right| \cdot (q_{n-1} + q_{n-2})^2 < 4\gamma\left(\frac{q_{n-1}}{s}\right)^2,$$

donde

$$s < 2\, q_{n-1} \sqrt{\gamma\,(k+2)^3}.$$

Allora è anche $a q_{n-1} < 2 q_{n-1} \sqrt{\gamma\,(k+2)^3}$, ossia $a < 2\sqrt{\gamma\,(k+2)^3}$. Così il nostro lemma è dimostrato.

4. Ricordiamo che $J(\theta)$ è l'insieme dei punti di ascissa $s^2((r/s) - \theta)$ (r e s interi positivi). Introdurremo ora certi insiemi $J_{a,b}(\theta)$. Fissati a e b, indicheremo con $J_{a,b}(\theta)$ l'insieme dei punti di ascissa

$$\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)} = (a q_{n-1} + b q_{n-2})^2 \left(\frac{a p_{n-1} + b p_{n-2}}{a q_{n-1} + b q_{n-2}} - \theta\right),$$

dove n percorre l'insieme dei numeri interi $\geqq 2$.

Sia γ un numero positivo, fisso. Consideriamo le frazioni r/s per le quali $|s^2((r/s) - \theta)| < \gamma$. Soltanto per un numero finito di tali frazioni vale la disuguaglianza $|(r/s) - \theta| \geqq (1/k+2)$ o valgono le relazioni (7) e (8) con $n = 1$. Dal lemma 1, segue quindi il seguente

COROLLARIO. – *Siano dati $\gamma > 0$ e $\theta \in L(k)$. Allora l'intersezione dell'insieme $J(\theta)$ e dell'intervallo $(-\gamma, \gamma)$ è contenuta, salvo un numero finito di punti, nell'unione degli insiemi $J_{a,b}(\theta)$ con $b \leqq a \leqq c(k, \gamma)$.*

5. Faremo spesso uso del seguente

LEMMA 3. – *Abbiamo*

$$\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)} = (-1)^n \frac{(a - b a_n^*)(a + b/\lambda_{n-1})}{a_n^* + 1/\lambda_{n-1}} \qquad (n \geqq 2,\ a \geqq 1,\ b \geqq 0), \tag{11}$$

dove λ_{n-1} è definito dalla relazione

$$\lambda_n = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1] \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{12}$$

Infatti,

$$\zeta_n = (a q_{n-1} + b q_{n-2})^2 \cdot \left(\frac{a p_{n-1} + b p_{n-2}}{a q_{n-1} + b q_{n-2}} - \frac{a_n^* p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}}\right)$$

$$= \frac{a q_{n-1} + b q_{n-2}}{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}} (a - b a_n^*)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$$

$$= (-1)^n (a - b a_n^*) \cdot \left(\frac{a_n^*}{a} + x\right)^{-1},$$

dove

$$x = \frac{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}}{a q_{n-1} + b q_{n-2}} - \frac{a_n^*}{a} = \frac{(a - b a_n^*) q_{n-2}}{a (a q_{n-1} + b q_{n-2})}$$

$$= \frac{a - b a_n^*}{a (b + a \lambda_{n-1})},$$

poiché

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1] = \lambda_{n-1};$$

quindi

$$\frac{1}{\zeta_n} = (-1)^n \left(\frac{a_n^*}{a (a - b a_n^*)} + \frac{1}{a (b + a \lambda_{n-1})} \right) = (-1)^n \frac{\lambda_{n-1} a_n^* + 1}{(a - b a_n^*)(b + a \lambda_{n-1})}$$

onde segue l'asserto.

6. Considereremo anche gli insiemi derivati $J'_{a,b}(\theta)$, per i quali è ora facile dimostrare il

LEMMA 4. - *Valgono le tre seguenti proprietà:*

1ª $J'(\theta) = \bigcup_{a,b} J'_{a,b}(\theta) = \bigcup_{\substack{a,b \\ b \leqq a}} J'_{a,b}(\theta)$;

2ª *ogni insieme* $J_{a,b}(\theta)$, *e quindi anche ogni insieme* $J'_{a,b}(\theta)$, *è limitato*;

3ª $J'(\theta)$ *è discreto se, e soltanto se, ogni insieme* $J'_{a,b}(\theta)$ *è finito.*

Infatti, sia x un punto di accumulazione di $J(\theta)$, $x \in J'(\theta)$, e poniamo $\gamma = |x| + 1$. Allora x è anche punto di accumulazione relativo all'intersezione di $J(\theta)$ con l'intervallo $(-\gamma, \gamma)$. Segue dal corollario ottenuto nel n. 4 che x è punto di almeno uno degli insiemi $J'_{a,b}(\theta)$ con $b \leqq a$.

Poiché d'altro canto, ogni insieme $J_{a,b}(\theta)$ è evidentemente contenuto nell'insieme $J(\theta)$, ne risulta la proprietà 1ª.

Fissati a e b, e siccome $\lambda_{n-1} \geqq 1$ e $a_n^* > 1$, si ricava subito dal lemma 3 che l'insieme dei numeri $\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)}$ è limitato. Vale dunque la proprietà 2ª.

Se $J'(\theta)$ è discreto, allora l'intersezione di $J'(\theta)$ con un intervallo finito è finita. È pure finito ogni insieme $J'_{a,b}(\theta)$, in virtù della proprietà 2ª già dimostrata. Inversamente, se ogni insieme $J'_{a,b}(\theta)$ è finito, allora $J'(\theta)$ è discreto, in virtù del corollario del lemma 1 e della proprietà 1ª. Così anche la proprietà 3ª è dimostrata.

7. Otterremo la prima parte del teorema A (enunciato nel n. 1), stabilendo il

TEOREMA 1. - *Se* θ *è un numero quadratico, allora l'insieme* $J'(\theta)$ *è discreto.*

Infatti, la frazione continua $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$ è periodica da un certo indice n_0 in poi, e la successione dei quozienti completi a_n^* è periodica a partire dallo stesso indice. Quindi i numeri a_n^* prendono soltanto un numero finito di valori diversi. Inoltre, ogni numero λ_{n-1} è sviluppabile in frazione continua, regolare, finita, la quale è puramente periodica se si fa astrazione dagli ultimi n_0 quozienti parziali; al variare di n, il periodo è sempre lo stesso a meno di una permutazione ciclica. La successione dei numeri λ_{n-1} ha dunque soltanto un numero finito di punti di accumulazione; e possiamo aggiungere che questi punti di accumulazione corrispondono biunivocamente ai valori di a_n^* per $n \geqq n_0$.

Dalle osservazioni fatte, e dal lemma 3, segue ora che, fissati a e b, la successione dei numeri $\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)}$ ha soltanto un numero finito di punti di accumulazione. In altre parole, ogni insieme $J'_{a,b}(\theta)$ è finito. Allora il lemma 4 ci dice che l'insieme $J'(\theta)$ è discreto. Resta così dimostrato il teorema 1.

Matematica. — *Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici.* Nota II (*) di CORNELIS GERRIT LEKKERKERKER, presentata dal Socio B. SEGRE.

8. Per poter procedere ci occorrono ancora due lemmi, che stabiliremo questo numero e nel numero successivo.

LEMMA 5. – *Siano k e n interi positivi. Allora esiste un numero positivo $\varepsilon = \varepsilon(n, k)$, dipendente solo da n e k, tale che vale la seguente proprietà. Siano ζ e η due numeri positivi, i cui sviluppi in frazioni continue regolari siano dati da*

$$\zeta = [b_0, b_1, b_2, \cdots] \quad , \quad \eta = [c_0, c_1, c_2, \cdots].$$

Sia ζ un numero di $L(k)$ e sia $|\zeta - \eta| < \varepsilon$. Allora si ha

$$b_\nu = c_\nu \quad per \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Indichiamo con t_m/u_m le ridotte della prima frazione continua e con b_m^* i quozienti completi di questa $(m = 0, 1, 2, \cdots)$. Abbiamo per un n comunque assegnato

$$\zeta = [b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n^*] = \frac{b_n^* t_{n-1} + t_{n-2}}{b_n^* u_{n-1} + u_{n-2}}$$

$$= \frac{t_{n-1}}{u_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{u_{n-1}(b_n^* u_{n-1} + u_{n-2})},$$

ed è inoltre $1 + 1/(k+1) < b_n^* < k+1$. Un numero positivo η soddisferà all'asserto, se possiamo scrivere

$$\eta = [b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, x], \quad \text{dove } x > 1,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1956.

e cioè se

$$\eta = \frac{t_{n-1}}{n_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{u_{n-1}(xu_{n-1} + u_{n-2})}, \quad \text{dove } x > 1. \tag{13}$$

Osserviamo dapprima che è: $u_{n-1} < (k+1)^n$. Consideriamo poi la funzione $\varphi(x)$ data da

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_{n-1}(xu_{n-1} + u_{n-2})}.$$

Essa è decrescente per $x > 1$, e si ha

$$\varphi(1) - \varphi(1 + 1/(k+1)) > \frac{1}{k+1}\{(1 + 1/(k+1))\, u_{n-1} + u_{n-2}\}^{-2}$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{\frac{k+1}{(k+2)\,u_{n-1} + (k+1)\,u_{n-2}}\right\}^2 > \frac{1}{9(k+1)\,u_{n-1}^2} > \frac{1}{9}(k+1)^{-(2n+1)},$$

$$\varphi(k+1) - \varphi(\infty) = \varphi(k+1) > \frac{1}{(k+2)\,u_{n-1}^2} > \frac{1}{9}(k+1)^{-(2n+1)}.$$

Ne segue che, se y è un numero reale per cui si abbia

$$|\varphi(b_n^*) - y| < \frac{1}{9}(k+1)^{-(2n+1)},$$

esiste un numero $x > 1$ tale che $y = \varphi(x)$. Da ciò segue il lemma, con

$$\varepsilon(n, k) = \frac{1}{9}(k+1)^{-(2n+1)}.$$

9. LEMMA 6. – *Sia* θ *un numero di* $L(k)$, $\theta = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$. *Supponiamo che la successione* $\{a_n^*\}$ *abbia soltanto un numero finito di punti di accumulazione. Allora la frazione continua* $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$ *risulta periodica da un certo indice in poi.*

Siano $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_g$, distinti fra loro, i punti di accumulazione della successione $\{a_n^*\}$. Gli sviluppi dei numeri ρ_i in frazioni continue regolari siano dati da

$$\rho_1 = [b_{10}, b_{11}, b_{12}, \cdots], \cdots, \rho_g = [b_{g0}, b_{g1}, b_{g2}, \cdots].$$

Nessuna di queste frazioni continue è finita, poiché ogni ρ_i è il limite di una certa successione di numeri appartenenti a $L(k)$ ed è quindi anche un numero di $L(k)$. Ovviamente $\rho_i \geqq 1$, e quindi $b_{i0} \geqq 1$ per $i = 1, 2, \cdots, g$.

Sia ora m un intero positivo $\geqq g$, tale che le frazioni continue finite

$$[b_{10}, b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,m-1}], \cdots, [b_{g0}, b_{g1}, b_{g2}, \cdots, b_{g,m-1}]$$

siano distinte fra loro. Poniamo $\varepsilon_0 = \varepsilon(2m, k)$ dove il numero $\varepsilon(2m, k)$ si determini col lemma 5 (n. 8). Sia poi n_0 un intero positivo tale che, per ogni indice $n \geqq n_0$, la differenza fra a_n^* ed almeno uno dei punti di accumulazione ρ_i sia minore di ε_0. Allora ad ogni $n \geqq n_0$ si può associare un certo indice $i = i(n) \leqq g$ in modo che si abbia

$$|a_n^* - \rho_{i(n)}| < \varepsilon_0. \tag{14}$$

Dalla (14) segue, per la definizione di ε_0, che certamente i primi m quozienti parziali corrispondenti negli sviluppi di a_n^* e $\rho_{i(n)}$ in frazioni continue regolari coincidono. Di conseguenza, per ogni $n \geqq n_0$ l'indice $i(n)$ è determinato univocamente.

Consideriamo ora i $g+1$ numeri $n = n_0, n_0+1, \cdots, n_0+g$. Ad almeno due di questi è associato il medesimo indice $i(n)$; sia $i(n_1) = i(n_1+p) = j$ dove $n_0 \leqq n_1 < n_1 + p \leqq n_0 + g$. Allora abbiamo

$$|a_{n_1}^* - \rho_j| < \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad |a_{n_1+p}^* - \rho_j| < \varepsilon_0,$$

mentre $1 \leqq p \leqq g \leqq m$. In conseguenza ancora del lemma 5, e per la definizione di ε_0, abbiamo dunque

$$a_{n_1+l} = b_{jl} \quad \text{e} \quad a_{n_1+p+l} = b_{jl} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \cdots, 2m-1,$$

e quindi

$$(15) \qquad a_{n_1+l} = a_{n_1+p+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \cdots, 2m-1.$$

In particolare,

$$(15') \qquad a_{n_1+l} = a_{n_1+p+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \cdots, p-1;$$

si ha poi

$$a_{n_1+p+l} = a_{n_1+2p+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \cdots, m-1,$$

in quanto $p + m - 1 \leqq 2m - 1$; ne segue che dev'essere

$$i(n_1 + p) = i(n_1 + 2p) = j.$$

Può infine ripetersi indefinitamente lo stesso ragionamento, sostituendo soltanto n_1 con n_1+p, oppure con n_1+2p, e via dicendo. Di conseguenza abbiamo

$$i(n_1 + sp) = j \quad \text{per} \quad s = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$a_{n_1+sp+l} = a_{n_1+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \cdots, p-1 \quad \text{e} \quad s = 0, 1, 2, \cdots.$$

L'ultima relazione fornisce l'asserto.

10. Siamo ora in grado di dimostrare anche la seconda parte del teorema A (enunciato nel n. 1), ossia di stabilire il

TEOREMA 2. – *Se* $J'(\theta)$ *è discreto, allora* θ *è un numero quadratico.*

Dal lemma 4 segue intanto che ogni insieme $J'_{a,b}(\theta)$ è finito. In particolare, faremo uso della finitezza degli insiemi $J'_{1,1}(\theta)$ e $J'_{2,1}(\theta)$, i quali consistono rispettivamente dei numeri $\zeta_n^{(1,1)}$ e $\zeta_n^{(2,1)}$.

Supponiamo che la successione $a_0^*, a_1^*, a_2^*, \cdots$ abbia un numero infinito di punti di accumulazione. Allora esistono infinite successioni crescenti di numeri interi positivi

$$\{n(i,1), n(i,2), \cdots, n(i,j), \cdots\} \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$

tali che:

1° la successione dei numeri $(-1)^{n(i,j)} \zeta_{n(i,j)}^{(1,1)}$, con $i, j = 1, 2, \cdots$, tende a un certo limite α_1 per $n(i,j) \to \infty$;

2° la successione dei numeri $(-1)^{n(i,j)} \zeta_{n(i,j)}^{(2,1)}$, con $i, j = 1, 2, \cdots$, tende a un limite α_2;

3° fissato i arbitrariamente, la successione $\{a^*_{n(i,j)}\}$ ha un limite, ρ_i, in modo che i numeri $\rho_1, \rho_2, \cdots$ risultano distinti fra di loro.

Si ha dunque

$$\lim_{j \to \infty} a^*_{n(i,j)} = \rho_i \quad , \quad \lim_{j \to \infty} (-1)^{n(i,j)} \zeta^{(1,1)}_{n(i,j)} = \alpha_1 ,$$

$$\lim_{j \to \infty} (-1)^{n(i,j)} \zeta^{(2,1)}_{n(i,j)} = \alpha_2 \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

I numeri a^*_n $(n = 1, 2, \cdots)$ e ρ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ appartengono tutti a $L(k)$, e sono quindi irrazionali; i numeri α_1 e α_2 sono finiti e non nulli, per il lemma 4 e i risultati del Cugiani richiamati nel n. 1.

Applichiamo ora il lemma 3, con $a = b = 1$. Troviamo che, per i fissato, risulta

$$\lim_{j \to \infty} (1 - a^*_{n(i,j)}) (1 + 1/\lambda_{n(i,j)-1}) (a^*_{n(i,j)} + 1/\lambda_{n(i,j)-1})^{-1} = \alpha_1 ,$$

e quindi anche

$$\lim_{j \to \infty} (1 - \rho_i) (1 + 1/\lambda_{n(i,j)-1}) (\rho_i + 1/\lambda_{n(i,j)-1})^{-1} = \alpha_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Si ha dunque

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\lambda_{n(i,j)-1}} = \tau_i , \quad \text{dove} \quad \frac{(1 - \rho_i)(1 + \tau_i)}{\rho_i + \tau_i} = \alpha_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Applicando di nuovo il lemma 3, con $a = 2$ e $b = 1$, troviamo che è anche

$$\frac{(2 - \rho_i)(2 + \tau_i)}{\rho_i + \tau_i} = \alpha_2 \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Abbiamo così ottenuto due relazioni colleganti i limiti ρ_i e τ_i; eliminando fra esse τ_i, si ricava:

$$(\alpha_1 - \alpha_2 - 1) x_i^2 + (2\alpha_1 - 1) x_i + \alpha_1 = 0 , \text{ con } x_i = 1 - \rho_i \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

Dunque, nell'ipotesi fatta, l'ultima relazione sarebbe soddisfatta da un numero infinito di distinte x_i, ciò che è assurdo. Pertanto la successione $a^*_0, a^*_1, a^*_2, \cdots$ non può che avere un numero finito di punti di accumulazione.

Infine il lemma 6 (n. 9) ci garantisce la periodicità della frazione continua $\theta = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$. Quindi θ è un numero quadratico, ciò che completa la dimostrazione del teorema.

11. Passiamo da ultimo a stabilire il teorema C (enunciato nel n. 1). Sia θ un numero di $L(k-1)$ e consideriamo l'insieme $J_{1,0}(\theta)$ quale risulta dal n. 4, dato cioè dai numeri $\zeta_n = \zeta_n^{(1,0)} = q^2_{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \theta\right)$ $(n = 2, 3, \cdots)$. Applicando a questi il lemma 3, con $a = 1$ e $b = 0$, ritroviamo la nota relazione [4]

$$(16) \qquad \zeta_n = q^2_{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \theta\right) = \frac{(-1)^n}{a^*_n + 1/\lambda_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \cdots).$$

(4) Si veda ad esempio: O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner (1913), p. 52, r. 4.

Faremo vedere che il numero θ può essere scelto in guisa che l'insieme dei punti di ascissa $(-1)^n (a_n^* + 1/\lambda_{n-1})$ sia denso su ambedue gli intervalli $(-k, -k/4)$ e $(k/4, k)$. Indicheremo tale insieme con $G = G(\theta)$.

Sia x un punto arbitrario nell'intervallo $(k/4, k)$. Definito il numero intero c mediante le $\sqrt{2} - 1 < x - c \leqq \sqrt{2}$, si ha $k/4 - c \leqq \sqrt{2}$, e quindi $c \geqq k/4 - \sqrt{2}$, sicché $c \geqq 1$; similmente si vede che $c \leqq k - (\sqrt{2} - 1)$, onde $c \leqq k - 1$. Al numero $x - c$ possiamo ora applicare il lemma 2 (n. 2); così troviamo che il numero x può venir scritto nella forma

$$x = x' + x'',$$

dove x' ed x'' sono due numeri di L (4) con $c < x' < c + 1$ e $0 < x'' < 1$. Ovviamente, x è punto di accumulazione di $G(\theta)$ se esiste una successione crescente di indici pari $n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots$, tale che si abbia

$$a_{n_i}^* \to x' \quad , \quad 1/\lambda_{n_i - 1} \to x'' \qquad \text{per } i \to \infty .$$

Dimostreremo anzitutto che ogni numero x dell'intervallo $(k/4, k)$ gode di questa proprietà, e tratteremo in modo analogo l'intervallo $(-k, -k/4)$.

Sia $m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots$ una successione crescente di interi positivi. Per $i \geqq 1$, siano $B_i(1), B_i(2), \cdots, B_i(4^{m_i})$ gli aggregati di m_i interi positivi, tutti $\leqq 4$. È immediato come si possa costruire una frazione continua tale che ognuno degli aggregati $B_i(j)$, con $1 \leqq j \leqq 4^{m_i}$ e $i \geqq 1$, appaia come successione di m_i suoi quozienti parziali consecutivi; basta mettere l'uno dopo l'altro, in un qualunque ordine, gli aggregati $B_i(j)$. Si potrebbero anche inserire fra due aggregati consecutivi altri interi o aggregati. A noi occorre considerare una frazione continua regolare

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots], \tag{17}$$

che rappresenti un numero di L $(k - 1)$ e goda della seguente proprietà.

Scelti a piacere il numero $\sigma = \pm 1$ e quattro interi positivi c, i, j, j', con $1 \leqq c \leqq k - 1, j \leqq 4^{m_i}, j' \leqq 4^{m_i}$ e $i \geqq 1$, esiste un indice

$$n = n(\sigma, c, i, j, j') > m_i$$

tale che si abbia:

$$(-1)^n = \sigma, \; a_n = c;$$

$$(a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+m_i}) \text{ sia l'aggregato } B_i(j);$$

$$(a_{n-m_i}, a_{n-m_i+1}, \cdots, a_{n-1}) \text{ sia l'aggregato } B_i(j').$$

Osserviamo che l'insieme di tali frazioni continue ha la potenza del continuo.

Riferiamoci ora a due numeri arbitrari x' e x'' di L (4) con $c < x' < c+1$ e $0 < x'' < 1$, dove c sia uno dei numeri $1, 2, \cdots, k + 1$. I loro sviluppi in frazioni continue regolari siano dati da

$$x' = [c, b_1, b_2, \cdots] \quad , \quad x'' = [0, c_1, c_2, \cdots].$$

Per ogni $i \geqq 1$, siano $B_i(j_i)$ l'aggregato $(b_1, b_2, \cdots, b_{m_i})$, $B_i(j_i')$ l'aggregato $(c_{m_i}, c_{m_i-1}, \cdots, c_1)$, e si ponga $n_i = n(1, c, i, j_i, j_i')$, $n_i' = n(-1, c, i, j_i, j_i')$.

Allora, nella suddetta frazione continua $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$, i quozienti parziali a_{n_i} e $a_{n'_i}$ sono preceduti dall'aggregato $(c_{m_i}, c_{m_i-1}, \cdots, c_1)$ e seguiti dall'aggregato $(b_1, b_2, \cdots, b_{m_i})$, mentre $a_{n_i} = a_{n'_i} = c$, n_i è un numero pari e n'_i è un numero dispari. Ne segue fra l'altro, siccome $m_i \to \infty$ per $i \to \infty$, che

$$\lim_{i\to\infty} a^*_{n_i} = \lim_{i\to\infty} a^*_{n'_i} = [c, b_1, b_2, \cdots] = x'$$

e

$$\lim_{i\to\infty} 1/\lambda_{n_i-1} = \lim_{i\to\infty} 1/\lambda_{n'_i-1} = [0, c_1, c_2, \cdots] = x''.$$

Quindi, poiché gli indici n_i sono pari e gli indici n'_i sono dispari,

$$\lim_{i\to\infty} (-1)^{n_i}(a^*_{n_i} + 1/\lambda_{n_i-1}) = x' + x'' \quad ,$$

$$\lim_{i\to\infty} (-1)^{n'_i}(a^*_{n'_i} + 1/\lambda_{n'_i-1}) = -(x' + x'').$$

Dalle cose dette segue che, se θ è il numero di L $(k-1)$ rappresentato dalla frazione continua (17), ogni punto degli intervalli $(-k, -k/4)$ e $(k/4, k)$ è di accumulazione per G (θ). Ne segue che l'insieme $J_{1,0}(\theta)$ è denso sugli intervalli $(-4/k, -1/k)$ e $(1/k, 4/k)$. Ora, se y è un punto di J (θ), tale è pure ogni punto $m^2 y$, dove m denoti un qualunque intero positivo. Quindi J (θ) è denso sull'asse reale al di fuori dell'intervallo $(-1/k, 1/k)$, ciò che completa la dimostrazione del teorema C.

Roma, 1956. – Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

RENDICONTI – Ferie 1956 (Settembre–ottobre)

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

INDICE

NOTE DI SOCI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

(*Segue in quarta pagina*)

ABBONAMENTI

Il prezzo dell'abbonamento per i Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali per l'anno 1956 è il seguente:

Italia: **L. 12.000** — Estero: **L. 13.000**

Gli abbonati possono chiedere l'invio raccomandato dietro aggiunta di lire 350 per l'Italia e di L. 700 per l'Estero.

Per i singoli fascicoli e per le annate arretrate, rivolgersi all'Accademia Nazionale dei Lincei - Ufficio Pubblicazioni - Via della Lungara, 10 - Roma - Tel. 552-425.

R. Morghen, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile*

Autorizzazione del Tribunale di Roma n. 2113 del 24-4-1951.
Spedizione in Abbonamento Postale Gruppo III